Лекция 2

Размещения без повторений. Размещения с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений без повторений, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n различных предметов?*

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 5.

В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить четыре фотографии. Сколькими способами можно это сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Решение.

В данной задаче мы не просто выбираем фотографии, а размещаем их на определенных страницах газеты, причем каждая страница газеты должна содержать не более одной фотографии. Таким образом, задача сводится к классической задаче об определении числа размещений без повторений из 12 элементов по 4 элемента:

$$A_{12}^4 = \frac{12!}{(12-4)!} = \frac{12!}{8!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 11880.$$

Таким образом, 4 фотографии на 12 страницах можно расположить 11880 способами.

Также классической задачей комбинаторики является задача о числе размещений с повторениями, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно выбрать и разместить по m различным местам m из n предметов, среди которых есть одинаковые?*

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Пример 6.

У мальчика остались от набора для настольной игры штампы с цифрами 1, 3 и 7. Он решил с помощью этих штампов нанести на все книги пятизначные номера– составить каталог. Сколько различных пятизначных номеров может составить мальчик?

Решение

Можно считать, что опыт состоит в 5-кратном выборе с возращением одной из 3 цифр (1, 3, 7). Таким образом, число пятизначных номеров определяется числом размещений с повторениями из 3 элементов по 5:

$$\overline{A}_3^5 = 3^5 = 243.$$

Перестановки без повторений. Перестановки с повторениями

Классической задачей комбинаторики является задача о числе перестановок без повторения, содержание которой можно выразить вопросом: *сколькими способами можно разместить n различных предметов на n различных местах?*

$$P_n = n!$$

Пример 7.

Сколько можно составить четырехбуквенных «слов» из букв слова«брак»?

Решение

Генеральной совокупностью являются 4 буквы слова «брак» (б, р, а, к). Число «слов» определяется перестановками этих 4 букв, т. е.

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Для случая, когда среди выбираемых n элементов есть одинаковые (выборка с возвращением), задачу о числе перестановок с повторениями можно выразить вопросом: сколькими способами можно переставить n предметов, расположенных на n различных местах, если среди n предметов имеются k различных типов (k < n), т. е. есть одинаковые предметы.

$$\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Пример 8.

Сколько разных буквосочетаний можно сделать из букв слова «Миссисипи»?

Решение

Здесь 1 буква «м», 4 буквы «и», 3 буквы «с» и 1 буква «п», всего 9 букв. Следовательно, число перестановок с повторениями равно

$$\overline{P}_9(1,4,3,1) = \frac{9!}{1! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 1!} = 2520.$$